

Анализ показывает, что снижение величины момента до нуля уменьшает износ гребней в сравнении с серийным тепловозом на 6...8%, а введение такого же по модулю “активного” момента способствует дальнейшему снижению показателей динамики и износа гребней – до 12% в кривых радиусом 350 м. Аналогичная картина наблюдается и на второй колесной паре тележки. При дальнейшем увеличении “активного” момента появляется устойчивый контакт у гребня третьей колесной пары с наружным рельсом, поскольку тележка занимает хордовое положение и появляется его износ. При выходе тепловоза из кривой “активный” момент препятствует повороту тележки, что делает необходимым его ограничение по величине.

Отсюда можно сделать следующие выводы:

- уменьшение момента сопротивления повороту тележки или введение “активного” момента, действующего между кузовом и тележкой в направлении кривой, в целом улучшают динамические показатели тепловоза, что способствует некоторому увеличению ресурса бандажей по износу гребней колес;

- величина “активного” момента ограничена по условиям выхода тепловоза из кривых участков пути, а также по износу гребня у третьей колесной пары.

Литература

1. Маслиев В.Г., Калинина С.А., Якунин Д.И. Базовая математическая модель горизонтальной динамики локомотива // Новые решения в современных технологиях: Вісник Харківського державного політехнічного університету. Збірка наукових праць. Випуск 118.- Харків: ХДПУ, 2000.- С.17 – 20. 2. А.С.1071495 СССР, МКИ В 61 F 5/02; В 61 F 5/16. Роликовая опора кузова локомотива / В.Г.Маслиев, Э.П.Елбаев, Ю.П.Рыжков, А.В.Клименко; (СССР).- 2с. ил.; Оpubл.07.02.84, Бюл. № 5.

Поступила в редколлегию 24.09.2001

УДК 517.944

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДВУХ УРАВНЕНИЙ

В.И.Мельник

Национальный технический университет "ХНУ", Харьков, Украина

В роботі розглядається модифікація відомого із теорії гіперболічних систем методу перетворення незалежних змінних по розв'язкові. В запропонованому варіанті, стосовно систем двох рівнянь гарантується перехід на сітку характеристик.

Введение

Актуальность проблемы дальнейшего изучения квазилинейных гиперболических систем уравнений диктуется их широким прикладным значением. Они нашли применение в газовой динамике [1]. На них базируются теории пластичности [2] и предельного равновесия [3] различных сред, например, сыпучих и связных. Известны и другие их приложения [4]. Ограничимся рассмотрением системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, приводимой к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial y} = b, \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2, \quad (1)$$

где: область D — односвязная; $u: D \rightarrow \mathbf{R}^2$ — искомая функция; $b = (b_i(x, y, u))_{i=1}^2$ — вектор-столбец; $A = (a_{ij}(x, y, u))_{i,j=1}^2$.

Пусть $l^i(x, y, u)$, $i = 1, 2$ — левые собственные векторы матрицы A , соответствующие собственным значениям $\xi_i(x, y, u)$, т.е. $l^i A = \xi_i l^i$.

Определение 1. Система квазилинейных уравнений (1) называется гиперболической в области D , если для всех $(x, y) \in D$: во-первых, все собственные значения $\xi_i(x, y, u)$, $i = 1, 2$ матрицы $A = A(x, y, u)$ вещественны; во-вторых, существуют линейно независимые нормированные левые собственные векторы $l^i(x, y, u)$, $i = 1, 2$ [1, 4, 5].

Определение 2. Система (1) называется гиперболической в узком смысле в области D , если для всех $(x, y) \in D$ выполняются условия определения 1, а собственные значения ξ_i , $i = 1, 2$ матрицы A различны [1].

Если для системы (1) условие гиперболичности соблюдается, то путем известных преобразований она приводится к нормальной форме [5]:

$$l^i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \xi_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = l^i b, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Определение 3. Под характеристическими направлениями системы (1) условимся понимать определенные уравнениями

$$\frac{dy}{dx} = \xi_i(x, y, u), \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

направления дифференцирования функции $u(x, y)$ в равенствах (2) [1].

Определение 4. Первые интегралы дифференциальных уравнений характеристик (3) определяют два однопараметрических семейства характеристических кривых (характеристик) с параметрами λ_i , $i = 1, 2$, соответствующими собственным числам ξ_i матрицы коэффициентов A [3].

В случае, когда два семейства характеристик используют как семейства координатных кривых, предполагают замену $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, где

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. В таком случае (3) дает [2,3]

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda_i} = \xi_i \frac{\partial x}{\partial \lambda_i} \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (4)$$

Обозначив $U(\lambda) = u(x(\lambda), y(\lambda))$ система (2) приводится к виду [5]

$$l^j \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = l^j b \frac{\partial x}{\partial \lambda_i} \quad i = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (5)$$

Определение 5. Уравнения системы (5), выполняющиеся вдоль характеристик $\lambda_j = \text{const}$ и, являющиеся следствиями уравнений исходной системы (1), условимся называть соотношениями на характеристиках.

Для некоторых конкретных систем рассматриваемого класса соотношения на характеристиках (5) удастся интегрировать [2,3].

1. Постановка задачи

Как показано выше, переход от исходной системы (1) к (4) и (5) предусматривает неявную замену переменных, при которой функциональные зависимости $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$ остаются неизвестными. Предложим явную замену переменных, когда связь между старыми координатами x , y и новыми (параметрами характеристик) λ_i , $i = 1, 2$, изначально представляется в аналитическом виде. Такую задачу ставим в предположении, что ее решение послужит дальнейшему развитию общей теории гиперболических систем.

Замечание. Переход от (x, y) к λ_i , $i = 1, 2$, в процессе которого система (2) преобразуется в систему (5), возможен в случае, если такая замена переменных является невырожденной, т.е. когда

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda_1, \lambda_2)} = \det \begin{vmatrix} \partial x / \partial \lambda_1 & \partial x / \partial \lambda_2 \\ \partial y / \partial \lambda_1 & \partial y / \partial \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

В известном случае частные производные $\partial / \partial \lambda_j x$, и $\partial / \partial \lambda_j y$, $j = 1, 2$, равно, как и якобиан (6), остаются неизвестными.

Заметим, что настоящая работа не первая [2,3] попытка решения такой задачи. Первым, применительно к математической теории пластичности, обозначил эту задачу, Христианович [5] в 1936 году.

2. Замена переменных

Из газовой динамики известно преобразование координат (независимых переменных) по решению [1], когда новые координаты записывают в виде выражений для полных дифференциалов. Этот метод предусматривает введение четырех новых неизвестных функций $\eta_i = \eta_i(\lambda, U)$, $\theta_i = \theta_i(\lambda, U)$, $i = 1, 2$, таких, что

$$\{ dy = \eta_1 d\lambda_1 + \theta_1 d\lambda_2; \quad dx = \eta_2 d\lambda_1 + \theta_2 d\lambda_2. \quad (7)$$

Законность замены (7) предполагает выполнение двух условий [1]:

$$\Delta = \eta_1 \theta_2 - \eta_2 \theta_1 \neq 0, \quad (8)$$

$$\partial \eta_i / \partial \lambda_2 = \partial \theta_i / \partial \lambda_1; \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Справедливость (8) вытекает из соображений существования решения системы (7) относительно дифференциалов $d\lambda_i$, $i = 1, 2$, а (9) — из равенства смешанных производных: $\partial^2 / \partial \lambda_1 \partial \lambda_2 x = \partial^2 / \partial \lambda_2 \partial \lambda_1 x$ и $\partial^2 / \partial \lambda_1 \partial \lambda_2 y = \partial^2 / \partial \lambda_2 \partial \lambda_1 y$.

Используем замену (7) для достижения цели, поставленной в п. 1 настоящей работы. Цель достигается если η_i , θ_i , $i = 1, 2$ — найдены, а применение замены (7) обеспечивает невырожденный переход от системы (2) к системе соотношений на характеристиках (5). Известный [1] алгоритм поиска функций η_i , θ_i , $i = 1, 2$ не всегда дает положительный результат (особенно в случае двух уравнений) и совсем не гарантирует переход к системе (5). В работе [1] преследовались иные цели. По этому, далее модифицируем известное преобразование координат по решению, для чего: во-первых, количество неизвестных функций из (7) сведем до двух; во-вторых, выведем уравнения, из которых эти две функции могут быть определены.

Поскольку вдоль характеристик $\lambda_i = \text{const}$ $d\lambda_i = 0$, $i = 1, 2$ из (7) имеем

$$\left\{ \frac{dy}{dx} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \xi_1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \xi_2 \right. \quad (10)$$

Собственные числа ξ_i , $i = 1, 2$ определяют направления дифференцирования (3) и, следовательно, могут быть записаны как тангенс некоторого угла, то используя замену

$$\sin \alpha_i = \xi_i / \sqrt{1 + \xi_i^2}, \quad \cos \alpha_i = 1 / \sqrt{1 + \xi_i^2}, \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

представим их в виде отношений:

$$\xi_i = \sin \alpha_i / \cos \alpha_i, \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

С учетом (10) и (12) можно утверждать, что функции η_i и θ_i , $i = 1, 2$ имеют общие, отличные от единицы, множители. Условимся называть их масштабирующими и обозначим соответственно:

$$v = v(x, y, u(x, y)) = v(\lambda, U) \quad \text{и} \quad \omega = \omega(x, y, u(x, y)) = \omega(\lambda, U). \quad (13)$$

Тогда учитывая (10 – 13), из (7) получим

$$\begin{cases} dy = v \sin \alpha_2 d\lambda_1 + \omega \sin \alpha_1 d\lambda_2, \\ dx = v \cos \alpha_2 d\lambda_1 + \omega \cos \alpha_1 d\lambda_2. \end{cases} \quad (14)$$

Запишем для (14) аналогичные (8), (9) уравнения ограничений

$$\Delta = \nu \omega \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0, \quad (15)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_2}(\nu \sin \alpha_2) - \frac{\partial}{\partial \lambda_1}(\omega \sin \alpha_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_2}(\nu \cos \alpha_2) - \frac{\partial}{\partial \lambda_1}(\omega \cos \alpha_1) = 0 \right\}. \quad (16)$$

При условии, когда выполняются требования гиперболичности в узком смысле, т.е. когда $\xi_1 \neq \xi_2$, выражение (15) трансформируется к виду

$$\nu \omega \neq 0. \quad (17)$$

Заметим, что для рассматриваемого класса систем уравнений, нашедших применение в теориях пластичности [2,5] и предельного равновесия ряда сред [3], условия гиперболичности в узком смысле — соблюдаются.

Теорема. *Применительно к системе квазилинейных гиперболических в узком смысле двух дифференциальных уравнений первого порядка (1), любое ненулевое решение $\nu = \nu(\lambda)$ и $\omega = \omega(\lambda)$ системы равенств смешанных производных (16) удовлетворяет требованию невырожденности преобразований независимых координат $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, выполняемых с использованием замены (14) в процессе перехода на сетку характеристик (λ) , т.е. к системе соотношений на характеристиках (5).*

Доказательство. Полагая, что решением системы (16) масштабирующие функции ν , ω получены и они удовлетворяют требованию (17), из системы замены независимых переменных (14) заключаем

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = \nu \sin \alpha_2; \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} = \omega \sin \alpha_1; \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = \nu \cos \alpha_2; \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} = \omega \cos \alpha_1. \quad (18)$$

Теперь, представив дифференциалы dx , dy из (3) через частные производные (18), приходим к системе (4), а от нее, выполнив подстановку ξ_i , $i = 1, 2$ в (2), непосредственно получаем соотношения на характеристиках (5).

Невырожденность таких преобразований непосредственно следует из прямой подстановки выражений частных производных (18) в условие (6). С учетом обязательного требования (17) условие (6) выполняется всегда

$$D(x, y)/D(\lambda_1, \lambda_2) = -\Delta \neq 0. \quad (19)$$

Теорема доказана.

Таким образом, используя предлагаемую замену переменных (14), применительно к системе (1), можно осуществить переход на сетку характеристик λ_i , $i = 1, 2$ (к системе (5)), не заботясь о поиске масштабирующих функций ν и ω . Сами же масштабирующие функции ν , ω можно получить решением системы (16), что мы покажем на конкретном примере.

3. Пример реализации метода

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} - 2k \left(\sin(2u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} - \cos(2u_2) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = \gamma \sin \alpha, \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + 2k \left(\cos(2u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sin(2u_2) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = \gamma \cos \alpha. \end{cases} \quad (20)$$

где k , α и γ — постоянные, а остальные обозначения совпадают с ранее принятыми. Она известна в теории предельного равновесия идеально-вязкой среды [3], имеет серьезное прикладное значение и обычно именуется системой уравнений предельного равновесия. К представлению системы (20) сводятся основные уравнения теории пластичности [2].

Путем формальных преобразований система (20) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \cos\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sin\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial u_1}{\partial y} \mp 2k \left[\cos\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sin\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = \\ = \gamma \left[\sin \alpha \cos\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) + \cos \alpha \sin\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

и, с учетом следующих обозначений

$$b_1 = \gamma \left\{ \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{2} \left[\tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\}, \quad (22)$$

$$b_2 = \gamma \frac{\cos \alpha}{4k} \left[\tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right],$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right] & k \left[\tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ \frac{1}{4k} \left[\tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right] & \frac{1}{2} \left[\tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{pmatrix}, \quad (23)$$

к матричной форме (1). Собственные значения ξ_i , $i = 1, 2$ и соответствующие левые собственные векторы l^i матрицы A (23) следующие:

$$\xi_i = \tan\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right), \quad l^i = \left\{ \mp (4k^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad 2k(4k^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

Система (20) квазилинейна и гиперболична в узком смысле во всей области определения, исключая геометрические места, где $u_2 \mp \pi/4 = \pm\pi(n+1/2)$, $n = 1, 2, \dots$. Развернутые уравнения характеристик для нее получаем подстановкой собственных значений ξ_i (24) матрицы A (23) в уравнения (3)

$$\cos(u_2 \mp \pi/4) dy - \sin(u_2 \mp \pi/4) dx = 0, \quad (25)$$

т.е. известным способом [3], а приведение системы (20) к виду (5) выполним, применяя предлагаемую замену переменных (14). Частные производные старых координат x , y по новым λ_i , $i = 1, 2$ получаем из выражений (18)

$$\begin{aligned}\partial y / \partial \lambda_1 &= v \sin(u_2 + \pi/4), \quad \partial y / \partial \lambda_2 = \omega \sin(u_2 - \pi/4), \\ \partial x / \partial \lambda_1 &= v \cos(u_2 + \pi/4), \quad \partial x / \partial \lambda_2 = \omega \cos(u_2 - \pi/4).\end{aligned}\quad (26)$$

Теперь, домножая уравнение (21) с верхними знаками на ω , а уравнение с нижними знаками — на v , учитывая (26), получаем соотношения на характеристиках λ_i , $i = 1, 2$ (форму (5)). После интегрирования они дают

$$u_1 \mp 2ku_2 = \gamma[x \sin \alpha + y \cos \alpha] + f_i(\lambda_i), \quad \text{при} \quad \lambda_i = \text{const}, \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

где $f_i(\lambda_i)$ — постоянные интегрирования, представленные, как функции от параметров характеристик λ , $i = 1, 2$. $f_i(\lambda_i)$ могут быть уточнены по граничным данным. Когда $f_i = \lambda_i$ из (27) имеем

$$u_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \gamma[x \sin \alpha + y \cos \alpha], \quad u_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4k}. \quad (28)$$

Производные (26) с учетом (17) удовлетворяют требованию (6), а значит проведенные преобразования независимых переменных — невырожденные.

Система (16), в этом частном случае с применением (28) дает

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_1} &= -\frac{v}{4k}, & \frac{\partial v}{\partial \lambda_2} &= -\frac{\omega}{4k}, \end{aligned} \right. \quad (29)$$

и в соответствии с конкретными граничными условиями может быть интегрирована [4], что, в конечном итоге, с учетом (28) позволяет полностью избавиться от опосредствованных зависимостей между старыми x , y и новыми λ_i , $i = 1, 2$ координатами в выражениях частных производных (26).

Заключение

Используя известную замену независимых переменных (7) с учетом предложенных ограничений (10) применительно к квазилинейным гиперболическим в узком смысле системам двух дифференциальных уравнений, можно выполнить невырожденную замену независимых переменных и перейти на сетку характеристик, не заботясь о поиске масштабирующих функций v и ω . Сами же $v(\lambda)$, $\omega(\lambda)$ в ряде случаев удастся получить из системы равенств смешанных производных (16).

Предложенная выше замена переменных является частным вариантом известной, именуемой “преобразованием независимых переменных по решению” [1], а поэтому будет логичным называть её “преобразованием независимых переменных по характеристическому решению”, акцентируя внимание на том, что, во-первых, в предлагаемом варианте осуществляется переход на сетку характеристик, а, во-вторых, для получения преимуществ метода необходимо иметь интегралы соотношений на характеристиках (типа (27)).

Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 688 с.
2. Можаровский Н.С. Теория пластичности и ползучести в инженерном деле // Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения. – К.: Выща шк., 1991. – Ч. 1. – 264 с.
3. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
4. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учебник. – М.: Изд-во РУДН, 1997. – 447 с.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
6. Христианович С.А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре // Мат. сб. – 1936. – Т. 1 (43). – Вып. 4. – С. 511 – 531.

Поступила в редколлегию 04.09.2001

УДК629.1.032:531.3

ОЦЕНКА НАГРУЖЕННОСТИ БАЛАНСИРОВ ПОДВЕСКИ ОПОРНЫХ КАТКОВ ГУСЕНИЧНОГО ТРАНСПОРТЕРА-ТЯГАЧА ЛЕГКОЙ ВЕСОВОЙ КАТЕГОРИИ.

Писарев В.П.

Национальный технический университет "ХНИ", Харьков, Украина

Quantitative estimate of the loading beams of loader-trailer MT-L is considered by new method as compared with traditional approach

Гусеничный транспортер–тягач МТ-Л является базовой машиной семейства унифицированных быстроходных гусеничных машин легкой весовой категории (вес снаряженной машины $\approx 85\text{кН}$, вес машины с грузом при перевозке груза без прицепа $\approx 130\text{кН}$). Ходовая часть тягача содержит шесть опорных катков на один борт. Опорные катки односкатные с наружной ошиновкой, гусеница двугребневая, подвеска опорных катков балансирная моноторсионная.

Традиционная методика расчета элементов ходовой части, (в частности методика изложенная в [1]), исходит из конфигурации (относительного положения катков и гусеницы), представленной на рис. 1а. Расчетная схема по этой методике вообще не учитывает боковых сил (в частности направляющих усилий в горизонтальной плоскости между опорными катками и гребнями гусеницы), а также смещение зоны приложения нагрузки в вертикальной плоскости.